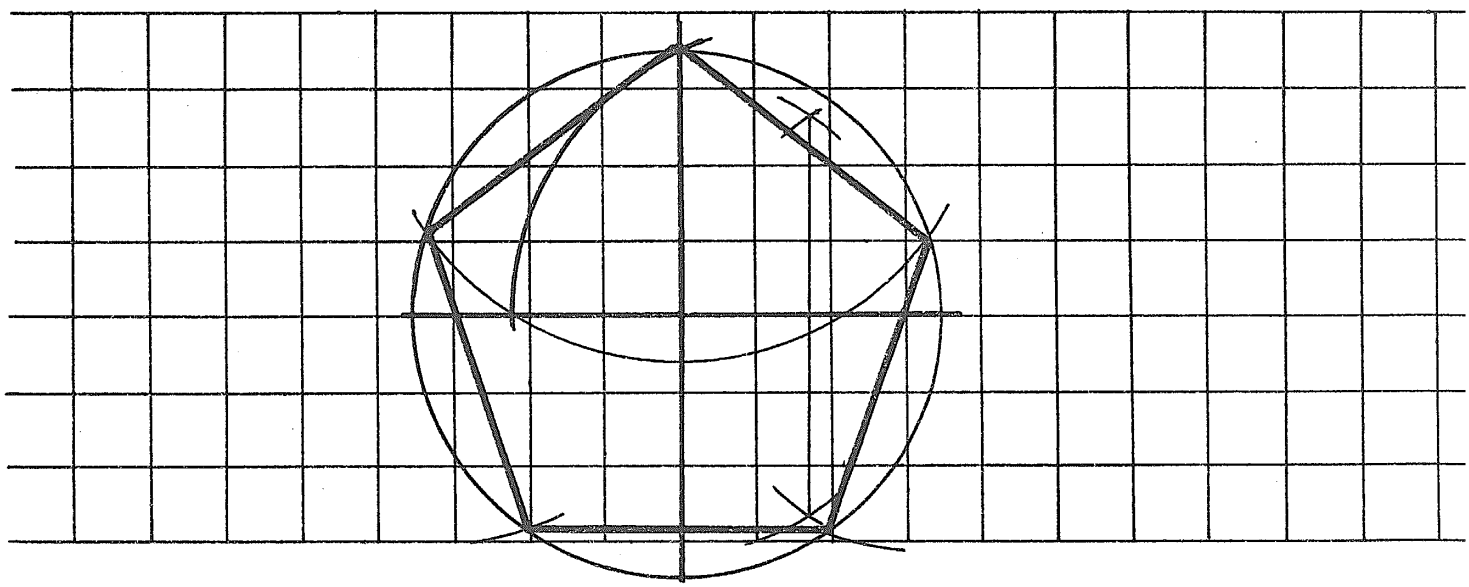
FIGURAS PLANAS

Obras que integran el bloque 4 *(Geometría euclidiana)*:

1. Conjuntos de puntos
2. Relaciones binarias
3. ***Figuras planas***
4. El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos
5. Polígonos convexos
6. Relación de semejanza
7. Geometría métrica en el plano
8. Cuerpos geométricos

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 4

Geometría euclidiana

Módulo 3

FIGURAS PLANAS

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
FIGURAS PLANAS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1984
ISBN 968-24-1242-0

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

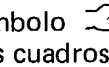
Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo  , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

3.1 Curvas cerradas simples/Polígonos

3.2 Triángulos

3.3 Clasificación de los triángulos

3.4 Bisectriz, mediatriz, mediana y altura en un triángulo

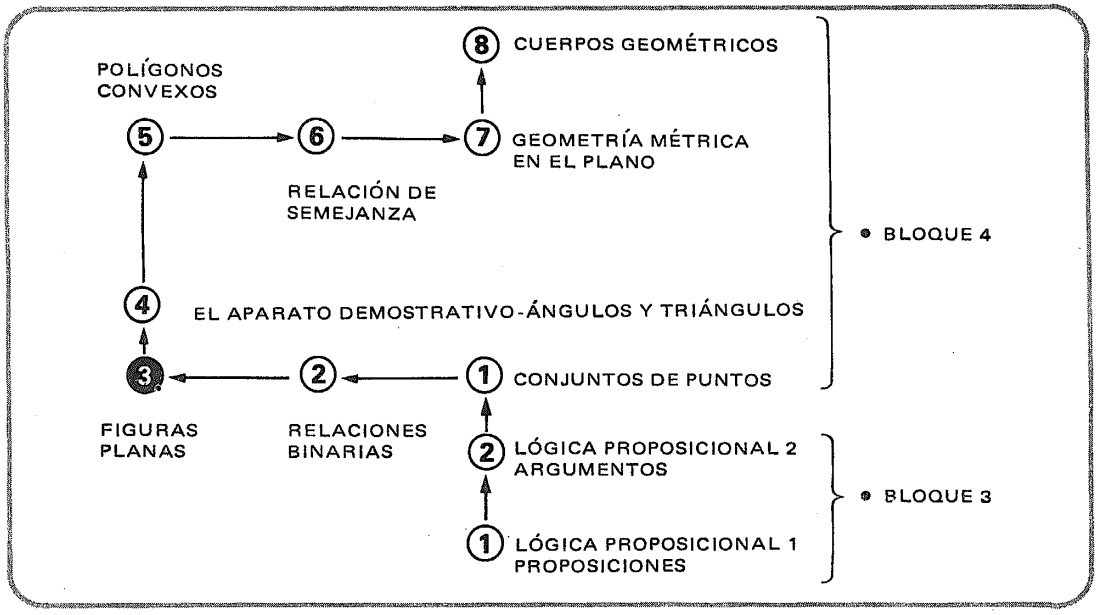
3.5 Ángulos opuestos por el vértice, adyacentes, correspondientes, alternos internos y alternos externos

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 4. Geometría euclidiana

Objetivos: establecer algunos hechos geométricos relacionados con ciertos conjuntos de puntos y demostrar determinados teoremas a partir de un grupo dado de axiomas o postulados básicos, aplicando las reglas del juego de la lógica

Esquema estructural del bloque 4.



Módulo 3. Figuras planas

Objetivos: establecer el concepto de triángulo, al proporcionar los elementos y los criterios para su clasificación

Prerrequisitos:

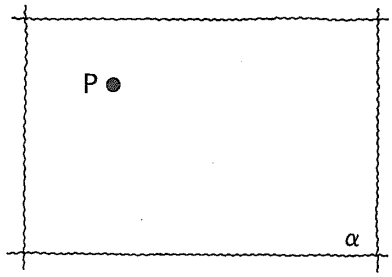
	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Nociones de lógica matemática	3	1, 2
• Conceptos geométricos básicos	4	1
• Relaciones binarias en la geometría	4	2

3.1

Curvas cerradas simples/Polígonos

1

A partir de un punto (P),
en el plano α,
tracemos una "línea"*
que
"sin intersecarse consigo misma"
regrese al punto de partida.



*Confiamos en las nociones intuitivas de "línea" y "no intersecarse una línea consigo misma".

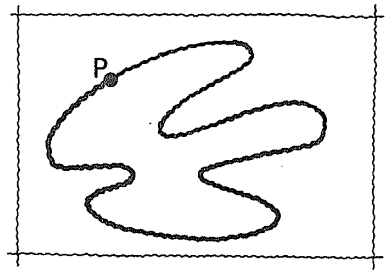
2

El resultado es la representación
de una

figura plana

que
llamaremos

curva cerrada simple.

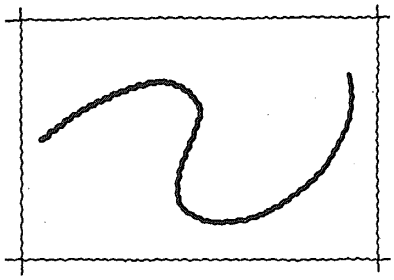


3

Esta sería entonces,
la representación de una

curva abierta

(no cerrada).

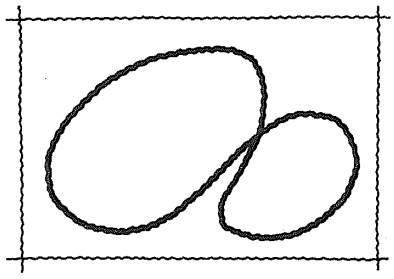


4

Y ésta,
la representación de una

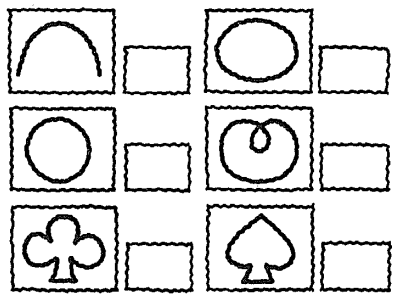
curva cerrada compuesta

(no simple).



5

Señalar con
ccs
las curvas cerradas simples,
con
ccc
las curvas cerradas compuestas,
y con
ca
las curvas abiertas.



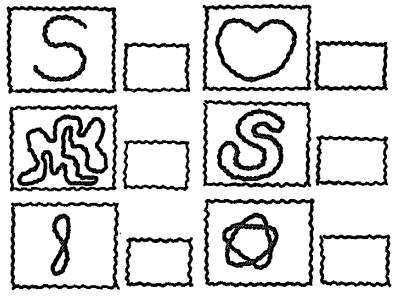
ca ccs

ccs ccc

ccs ccs

6

Señalar con
ccs
las curvas cerradas simples,
con
ccc
las curvas cerradas compuestas,
y con
ca
las curvas abiertas.



ca ccs

ccs ccs

ccc ccc

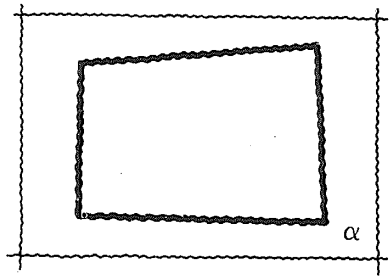
7

Señalar la opción correcta.

De acuerdo con la noción
establecida,
ésta

es/no es

la representación
de una curva cerrada simple.



es

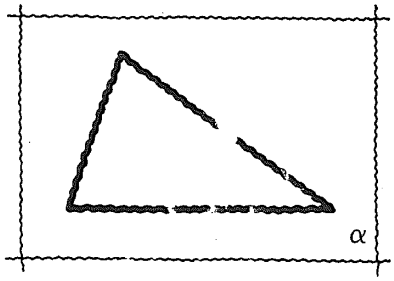
8

Señalar la opción correcta.

Ésta

es/no es

la representación
de una curva cerrada simple.



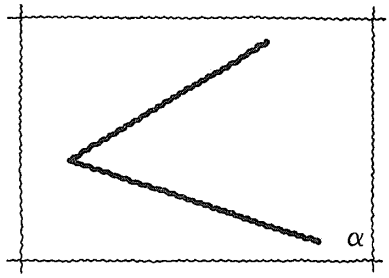
es

9

Ésta

es/no es

la representación
de una curva cerrada simple.



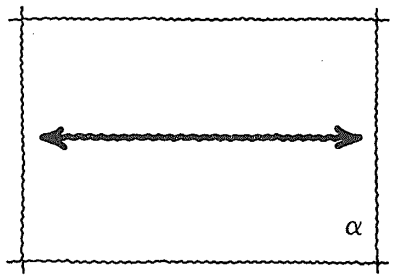
no es

10

Ésta

es/no es

la representación
de una curva cerrada simple.



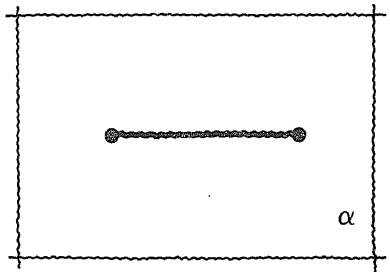
no es

11

Ésta

es/no es

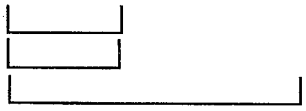
la representación
de una curva cerrada simple.

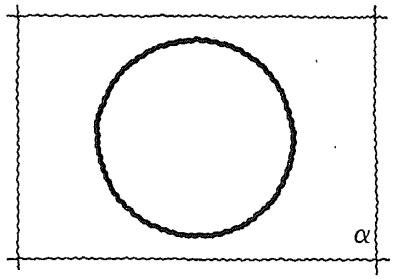


no es

12

Consideremos, ahora,
la curva cerrada simple mostrada.
Podemos ver intuitivamente que
el plano en que se encuentra
contenida queda dividido en tres
porciones ajenas llamadas:





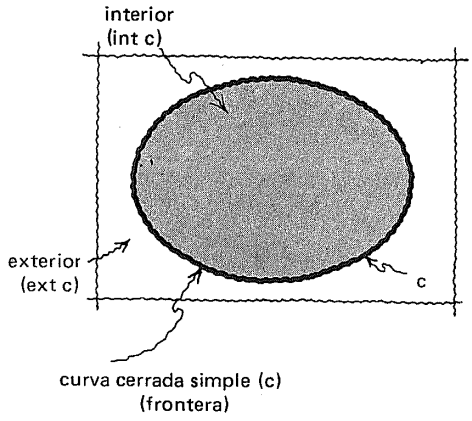
- interior
- exterior
- curva cerrada simple o frontera

13

La curva cerrada
simple
constituye la

frontera

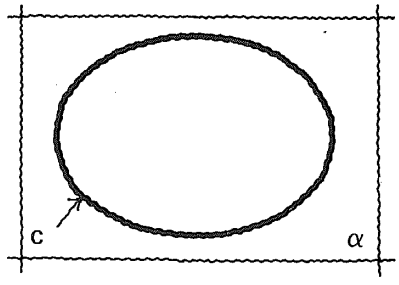
entre el interior
y el exterior,
y no está contenida
en ninguno de
tales subconjuntos
del plano.



14

Realizaremos algunas operaciones
con conjuntos de puntos.

int c U ext c U c =



α

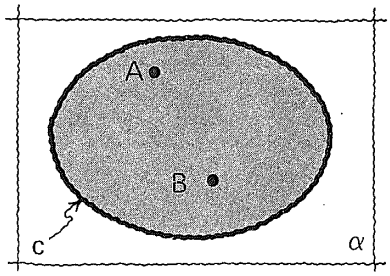
15

Señalar la opción correcta.

Sean A y B dos puntos pertenecientes al interior de la curva cerrada simple c,

$\overleftrightarrow{AB} \subset \text{int } c$

V/F



V

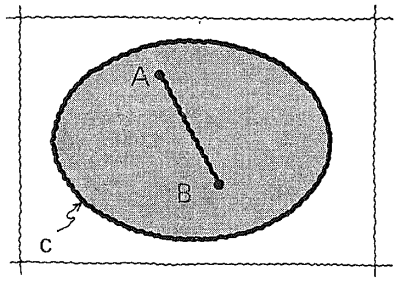
16

Atención;

¿Podríamos afirmar que, para cualquier curva cerrada simple c,

si $A \in \text{int } c \wedge B \in \text{int } c$
entonces $\overleftrightarrow{AB} \subset \text{int } c$?

Sí/No

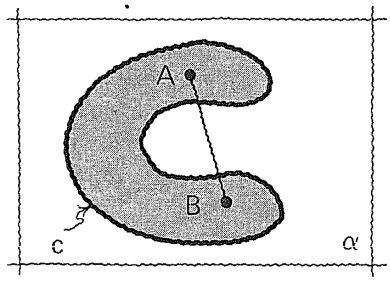


No

17

Vemos que hay curvas cerradas simples para las que no se cumple

$A \in \text{int } c \wedge B \in \text{int } c \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \text{int } c$.



18

Trazar otras curvas cerradas simples para las que no se cumpla

$A \in \text{int } c \wedge B \in \text{int } c \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \text{int } c.$

No se da respuesta.

19

Diremos que una

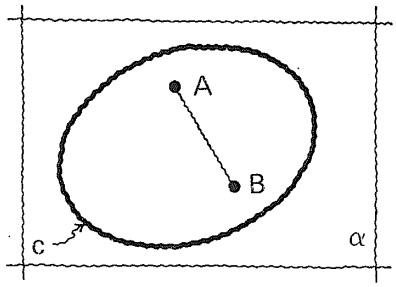
curva cerrada simple (c)

es

convexa

cuando cumple con:

$A \in \textbf{int c} \wedge B \in \textbf{int c} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \textbf{int c.}$

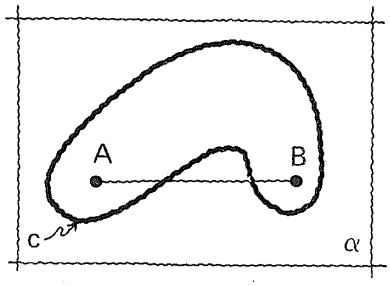


20

Ésta es la representación de una

curva cerrada simple

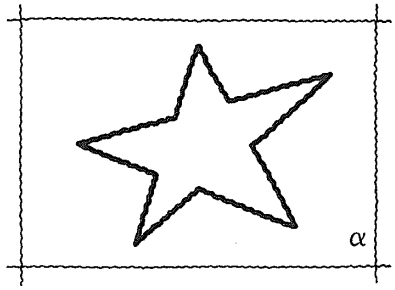
no convexa,
o
cóncava.



21

¿Es ésta la representación
de una
curva cerrada simple
convexa?

Sí/No

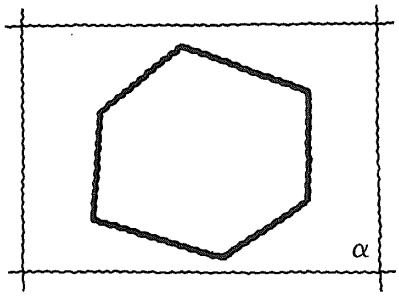


No

22

¿Es ésta la representación
de una
curva cerrada simple
convexa?

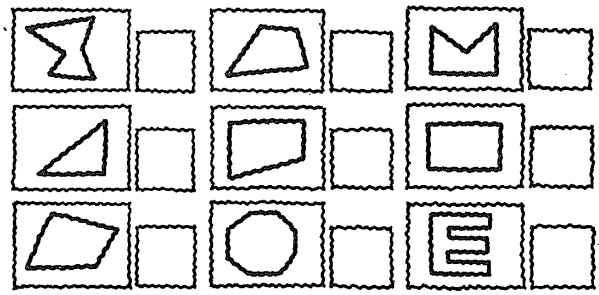
Sí/No



Sí

23

Señalar
las curvas cerradas simples convexas (X)
y la cóncavas (V).



V X V

X X X

X X V

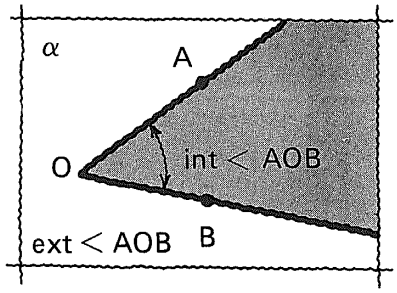
4.3.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

24

En un ángulo
podemos definir, también,

- un interior
- un exterior
  y
- el ángulo, propiamente dicho, o frontera



25

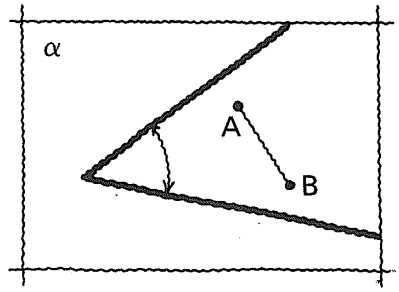
Diremos que un

ángulo

como el representado aquí
es

convexo,

o
es
una figura plana convexa.

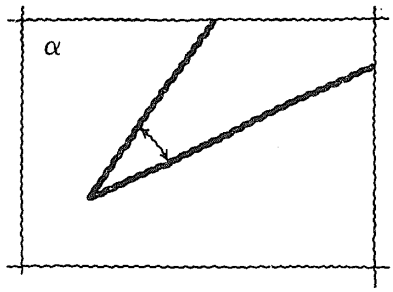


26

Señalar la opción correcta.

Todo ángulo agudo es convexo.

V/F



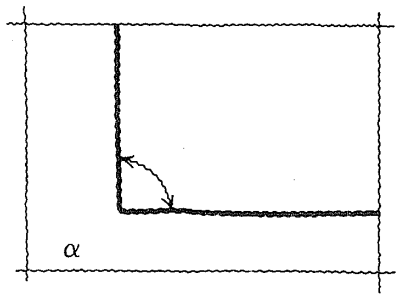
V

27

Señalar la opción correcta.

Un ángulo recto
es una figura plana convexa.

V/F



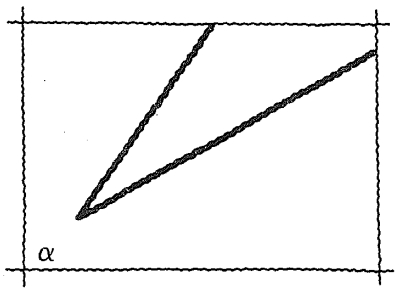
V

28

Señalar la opción correcta.

Un ángulo es
una curva cerrada simple.

V/F



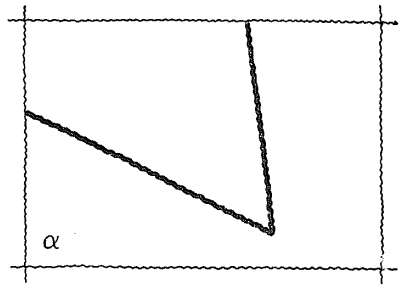
F

29

Señalar la opción correcta.

Un ángulo es una curva abierta.

V/F



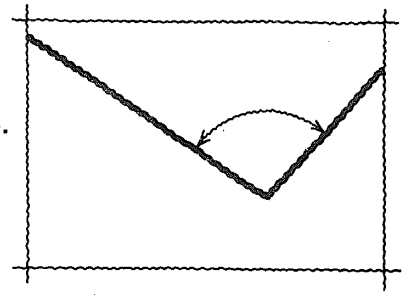
V

30

Señalar la opción correcta.

Todo ángulo obtuso es convexo.

V/F



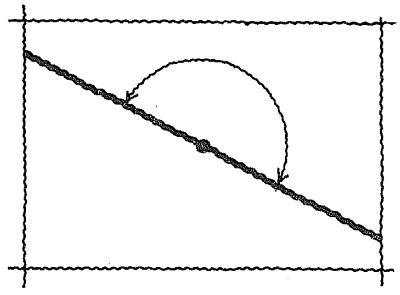
V

31

Señalar la opción correcta.

Un ángulo llano es convexo.

V/F



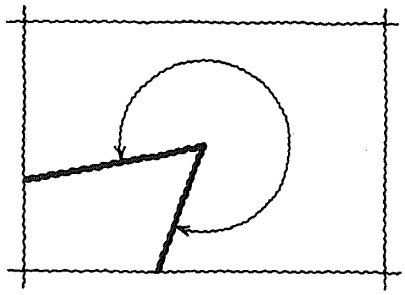
V

32

Señalar la opción correcta.

Un ángulo cuya medida es mayor que la de un ángulo llano y menor que la de un ángulo de una vuelta, es convexo.

V/F



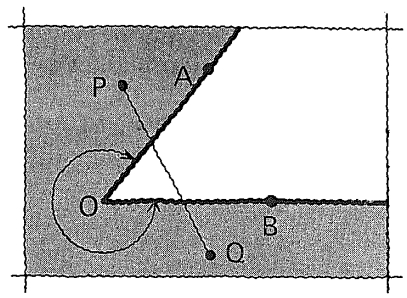
F

33

- int $< AOB$

$P \in \text{int} < AOB \wedge Q \in \text{int} < AOB \wedge \overleftrightarrow{PQ} \not\subset \text{int} < AOB$

Un ángulo cuya medida es mayor que la de un ángulo llano y menor que la de un ángulo de una vuelta, es cóncavo.



34

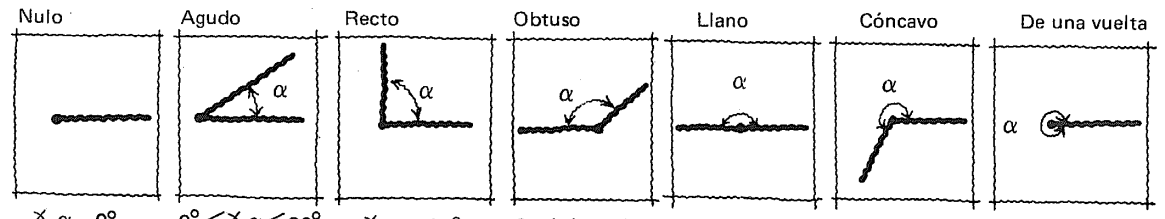
Con esta definición de ángulo cóncavo, podemos completar nuestro esquema de

clasificación de los ángulos

en el cuadro siguiente.

35

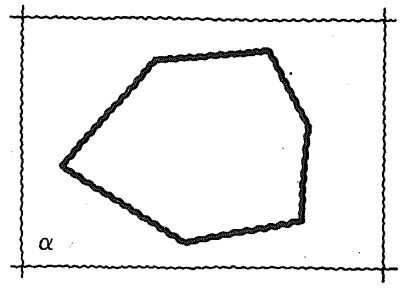
Clasificación de los ángulos según su medida.



36

Una clase importante
de figuras cerradas simples
la constituyen

los polígonos.



37

Un

polígono

es una curva cerrada simple formada
por la unión de tres o más
segmentos de recta.

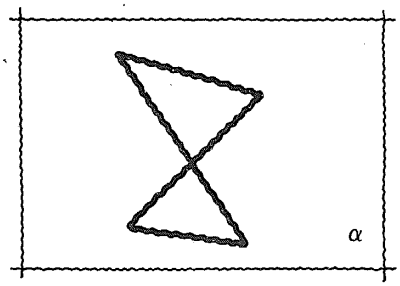
38

Señalar la opción correcta y completar.

Ésta

es/no es

la representación de un polígono, porque



no es

no es una curva cerrada simple

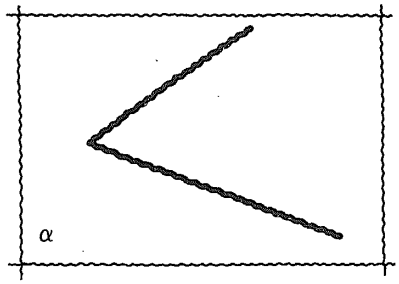
39

Señalar la opción correcta y completar.

Ésta

es/no es

la representación de un polígono, porque



no es

no está formada por tres o más segmentos de recta.

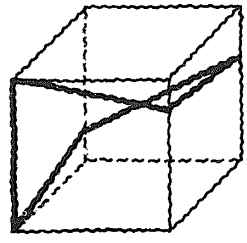
40

Señalar la opción correcta y completar.

La figura sugerida

es/no es

un polígono, porque



no es

no es una curva cerrada simple; (no es una figura plana)

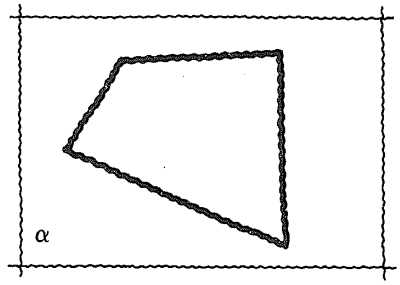
41

Señalar la opción correcta y completar.

La figura así representada

es/no es

un polígono,
porque



es

es una curva cerrada simple y está formada por la unión de tres o más segmentos de recta

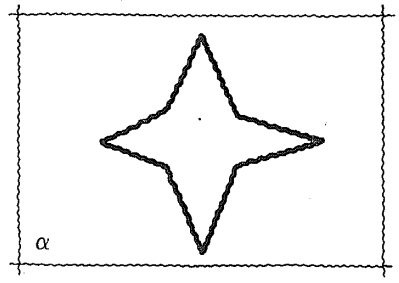
42

Señalar la opción correcta y completar.

La figura representada

es/no es

un polígono,
porque



es

es una figura cerrada simple y está formada por la unión de tres o más segmentos de recta.

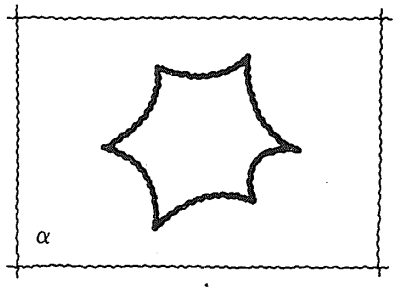
43

Señalar la opción correcta y completar.

La figura representada

es/no es

un polígono,
porque



no es

es una curva cerrada simple, pero no está formada por la unión de tres o más segmentos de recta

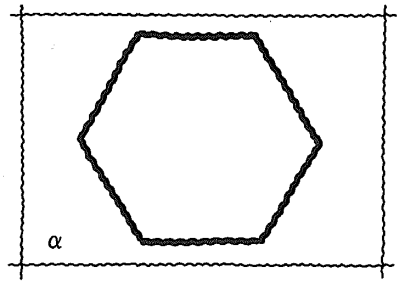
44

Señalar la opción correcta y completar.

La figura representada

es/no es

un polígono,
porque



es

- es una curva cerrada simple
  y
  está formada por la unión de tres o más segmentos de recta

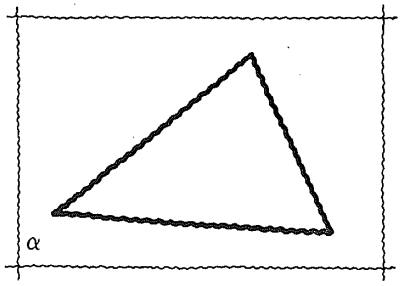
45

Señalar la opción correcta y completar.

La figura representada

es/no es

un polígono,
porque



es

es una curva cerrada simple y está formada por la unión de tres o más segmentos de recta

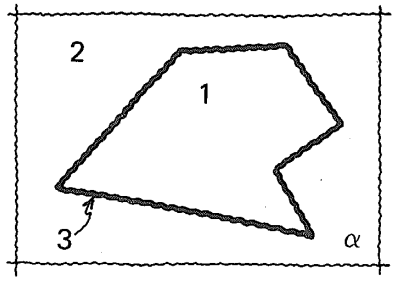
46

Como en cualquier otra curva cerrada simple,
en un polígono
identificamos tres porciones del plano, que llamamos:

1.

2.

3.



interior

exterior

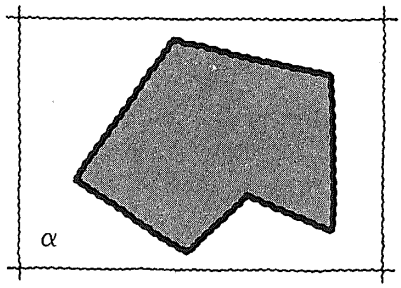
el polígono mismo
(o frontera)

47

Atención.

A la unión de un polígono
y su interior
le llamaremos

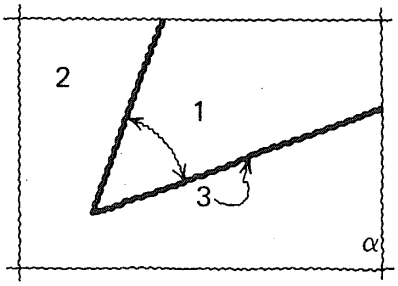
región poligonal.



48

Hemos visto que
en un ángulo
podemos considerar
tres porciones del plano en
que se encuentra incluido:

1. ⌊_____⌋
2. ⌊_____⌋
3. ⌊_____⌋



interior

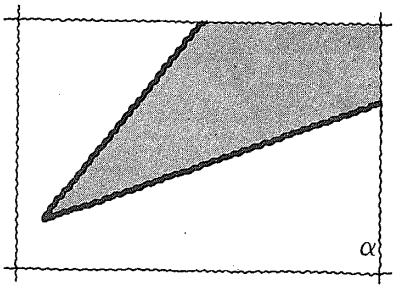
exterior

el ángulo mismo
(o frontera)

49

A la unión de un ángulo y
su interior le podemos llamar

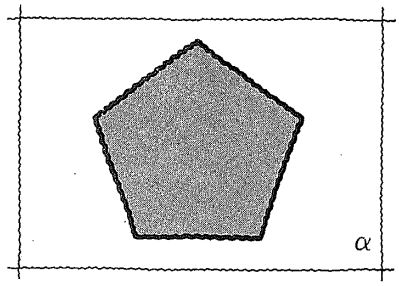
región angular.



50

Ésta es la representación de una

región poligonal.

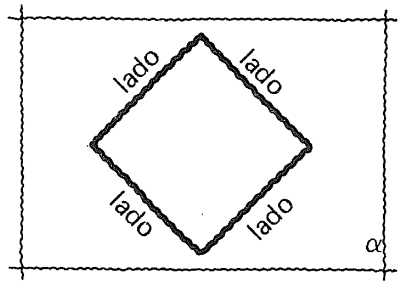


51

A los segmentos de recta que constituyen un polígono les llamaremos

lados

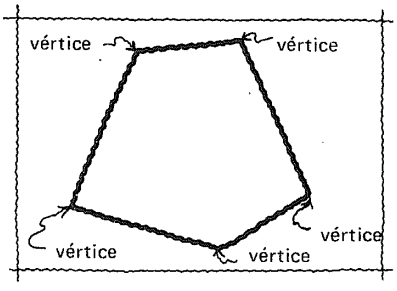
del polígono.



52

El punto de intersección de dos lados de un polígono tomará el nombre de

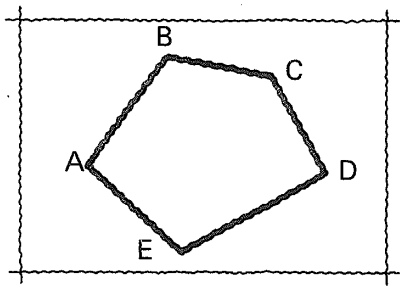
vértice.



53

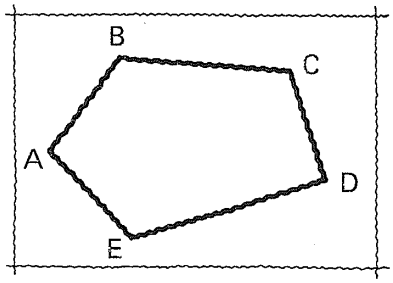
Representación simbólica.

Polígono ABCDE.



54

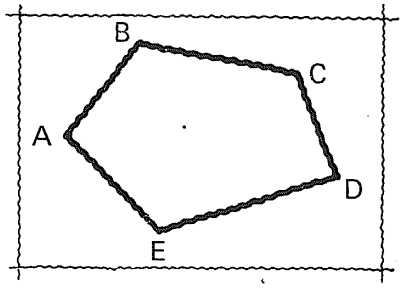
Los puntos A, B, C, D, E son los [ ] del polígono [ ]



vértices
ABCDE

55

Los segmentos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{EA}$ son los [ ] del polígono [ ]



lados
ABCDE

56

{A} es la intersección de los lados ⌊__⌋ y ⌊__⌋

Simbólicamente:

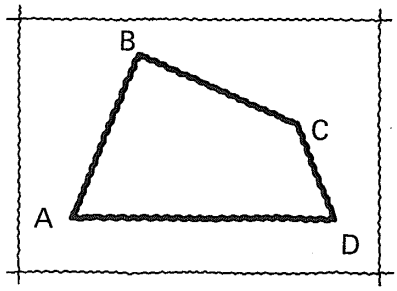
⌊__⌋ ∩ ⌊__⌋ = ⌊__⌋

De manera similar:

⌊__⌋ ∩ ⌊__⌋ = {B}

⌊__⌋ ∩ ⌊__⌋ = ⌊__⌋

⌊__⌋ ∩ ⌊__⌋ = ⌊__⌋



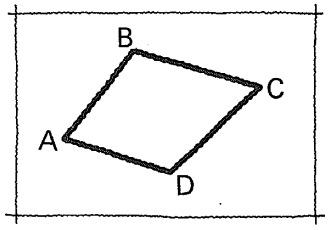
- $\overleftrightarrow{AB}$ • $\overleftrightarrow{AD}$ (en cualquier orden)
- $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{AD} = \{A\}$
- $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{B\}$
- $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{C\}$
- $\overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{DA} = \{D\}$

(Recordar que: $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$, etcétera.)

57

Señalar la opción correcta.

	V	F
A∈ polígono ABCD.	⌊__⌋	⌊__⌋
$\overleftrightarrow{AB} \subset$ polígono ABCD.	⌊__⌋	⌊__⌋
{A} ⊂ polígono ABCD.	⌊__⌋	⌊__⌋
$\overleftrightarrow{AC} \subset$ polígono ABCD.	⌊__⌋	⌊__⌋
$\overleftrightarrow{BD} \subset$ polígono ABCD.	⌊__⌋	⌊__⌋

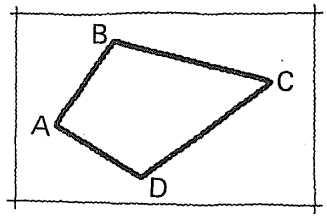


V
V
V
F
F

58

Señalar la opción correcta.

	V	F
$\overline{AB} \subset$ polígono ABCD.	⌊__⌋	⌊__⌋
$\overleftrightarrow{AB} \subset$ polígono ABCD.	⌊__⌋	⌊__⌋
$\overrightarrow{AB} \subset$ polígono ABCD.	⌊__⌋	⌊__⌋
$\overrightarrow{AB} \subset$ polígono ABCD.	⌊__⌋	⌊__⌋



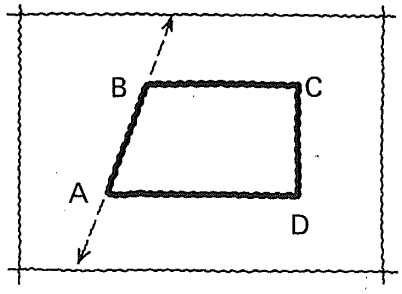
V
F
F
F

59

Atención.

Por ejemplo:

$\overleftrightarrow{AB} \not\subset$ **polígono ABCD.**



60

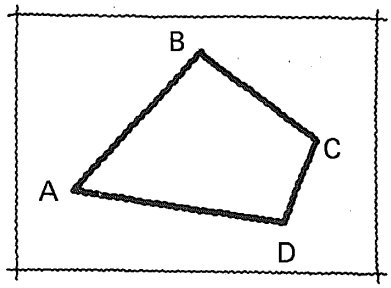
Podremos hablar, también, de

ángulos interiores

de un polígono.

En el polígono mostrado, los ángulos interiores son:

∠DAB, ⌊____⌋, ⌊____⌋ y ⌊____⌋.



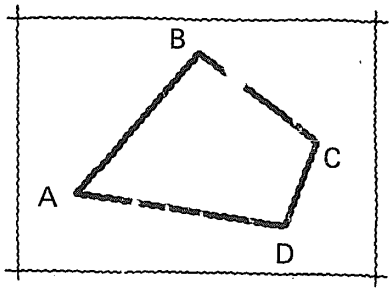
∠ABC ∠BCD ∠CDA

61

Señalar la opción correcta.

∠DAB ⊂ **polígono ABCD.**

V/F



F

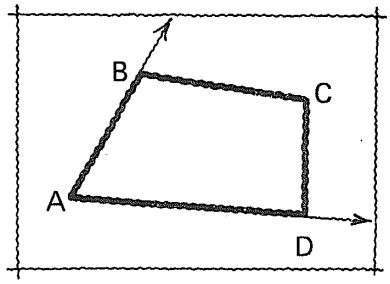
Ver cuadro anterior

62

Atención.

Observemos que:

$\angle DAB \not\subset$ **polígono ABCD.**



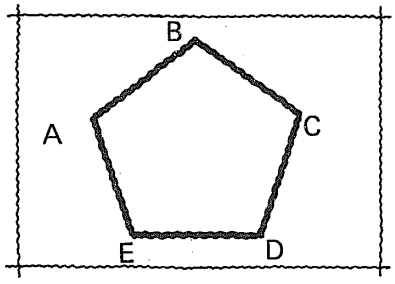
63

El polígono representado tiene:

_____ lados,

_____ vértices,

_____ ángulos interiores.



5

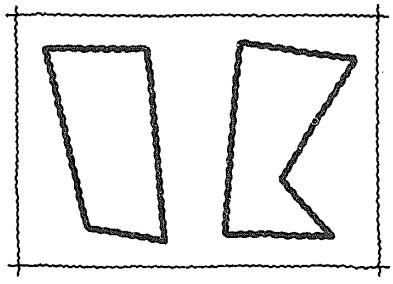
5

5

64

Como cualquier otra curva cerrada simple, un polígono puede ser

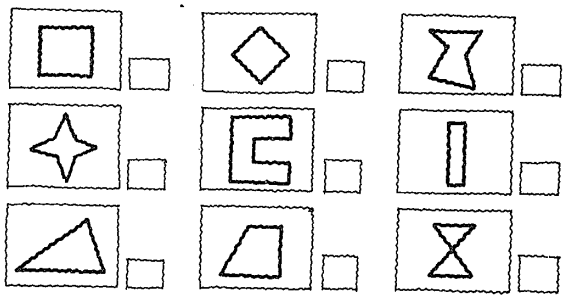
_____ o **cóncavo.**



convexo

65

Señalar con X los polígonos convexos y con V los polígonos cóncavos.



X X V

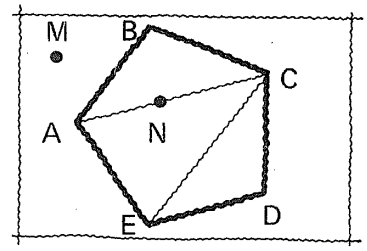
● V V X

● X X *

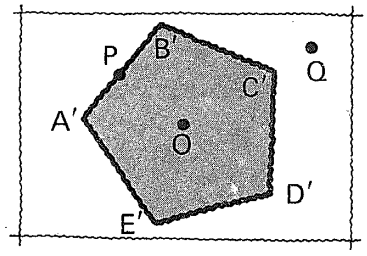
*La figura representada así: no ha sido definida como polígono.

66

Observar las siguientes figuras y señalar la opción correcta en el siguiente recuadro



Polígono ABCDE.



Región poligonal A'B'C'D'E'.

Señalar la opción correcta.

	V/F
N ∈ polígono ABCDE.	F
M ∈ ext polígono ABCDE.	V
O ∈ int polígono A'B'C'D'E'.	V
O ∈ región poligonal A'B'C'D'E'.	V
P ∈ región poligonal A'B'C'D'E'.	V
Q ∉ región poligonal A'B'C'D'E'.	V

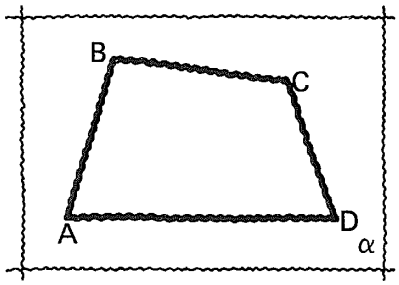
4.3.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *Explicar* lo que entiende por curva abierta, curva cerrada simple y curva cerrada compuesta,
- *discriminar* entre curvas abiertas, curvas cerradas simples y curvas cerradas compuestas,
- *señalar* y *nombrar* las porciones en que una curva cerrada simple divide al plano que la contiene,
- *discriminar* entre curvas cerradas simples convexas, y curvas cerradas cóncavas,
- *explicar* lo que es un ángulo cóncavo,
- *definir* un polígono, y señalar las diferencias entre polígono y región poligonal,
- *identificar* los lados, vértices y ángulos interiores de un polígono.

67

Examinar con atención, antes de responder.

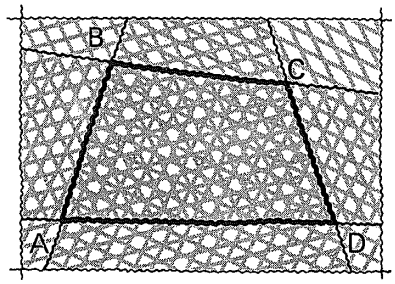


Sp $[\overleftrightarrow{AB}, D) \cap$ Sp $[\overleftrightarrow{BC}, A) \cap [\overleftrightarrow{CD}, A) \cap [\overleftrightarrow{AD}, B) =$ ⌊_____⌋

región poligonal ABCD

68

Estudiar con atención.



Sp $[\overleftrightarrow{AB}, D)$

Sp $[\overleftrightarrow{BC}, A)$

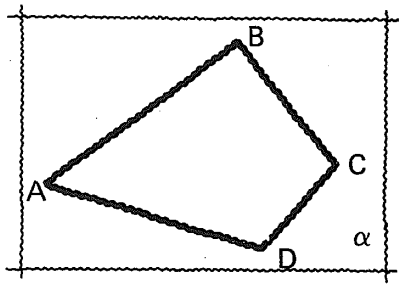
Sp $[\overleftrightarrow{CD}, A)$

Sp $[\overleftrightarrow{AD}, B)$

Sp $[\overleftrightarrow{AB}, D) \cap$ Sp $[\overleftrightarrow{BC}, A) \cap [\overleftrightarrow{CD}, A) \cap [\overleftrightarrow{AD}, B)$

69

Similarmente,
int polígono ABCD = ⌊_____⌋



Sp $(\overleftrightarrow{AD}, B) \cap (\overleftrightarrow{BA}, D)$

$\cap (\overleftrightarrow{CB}, A) \cap (\overleftrightarrow{DC}, B)$

(o alguna expresión equivalente)

Nótese, por ejemplo, que

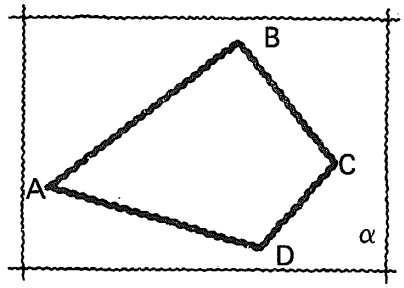
Sp $(\overleftrightarrow{AD}, B)$ = Sp $(\overleftrightarrow{DA}, B)$

= Sp $(\overleftrightarrow{AD}, C)$

= Sp $(\overleftrightarrow{DA}, C)$

70

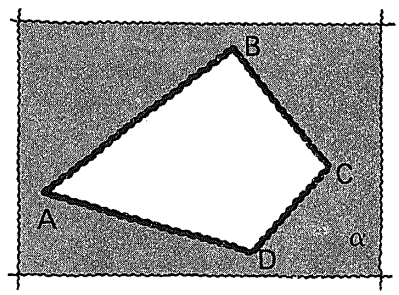
Ext polígono ABCD = ⌊_____⌋



α – región poligonal ABCD

71

▭ ext polígono ABCD



3.2

Triángulos

72

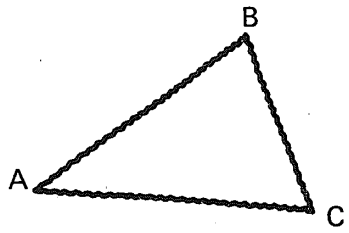
Triángulo

es
un

polígono

de 3

lados.



73

Si decimos:

triángulo

es un

polígono

de tres

lados,

tendremos que preguntarnos
qué es

polígono

y qué es

lado.

74

Recordar que
hemos definido un

polígono

como una

curva cerrada simple ← (?)

formada por la unión de tres o más

segmentos de recta.

Y además hemos definido
un

lado

como cada uno de los

segmentos de recta ← (?)

que determinan el polígono.

75

Hemos llamado

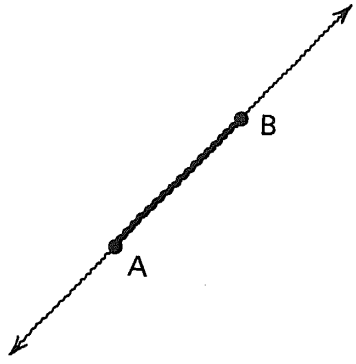
segmento de recta $\overline{AB}$

a la intersección de los

rayos ← (?)
$\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BA}$
contenidos en la

recta ←
$\overleftrightarrow{AB}$.

"Término no definido."



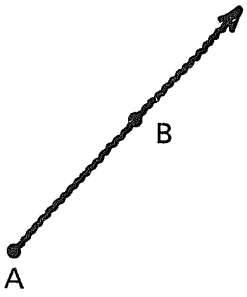
76

Rayo $\overrightarrow{AB}$

ha sido definido
como la unión
del punto A y la

semirrecta ← (?)

AB



77

Semirrecta $\overrightarrow{AB}$
es
cada uno de los dos
subconjuntos ajenos de

puntos ← "término no definido"

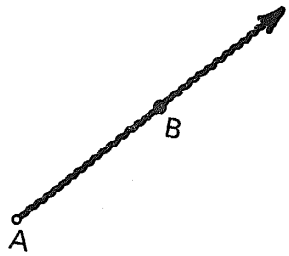
en que la

recta $\overleftrightarrow{AB}$ ← "término no definido"

queda dividida por un

punto A ← "término no definido"

perteneciente a ella.



78

¿Que es **curva cerrada simple**?
la hemos considerado
como una
figura plana ← (?)
que puede ser trazada a partir de un

punto ← "término no definido"

y regresando a él

"sin intersecarse consigo misma". "Noción intuitiva sobrentendida."*

* En un estudio formal de estas cuestiones, se requerirían definiciones precisas, que no descansaran en "noción intuitiva sobrentendida".*

79

¿Y qué es una **figura plana?**

Todo subconjunto de

puntos ← "término no definido"

de un

plano. ← "Término no definido"

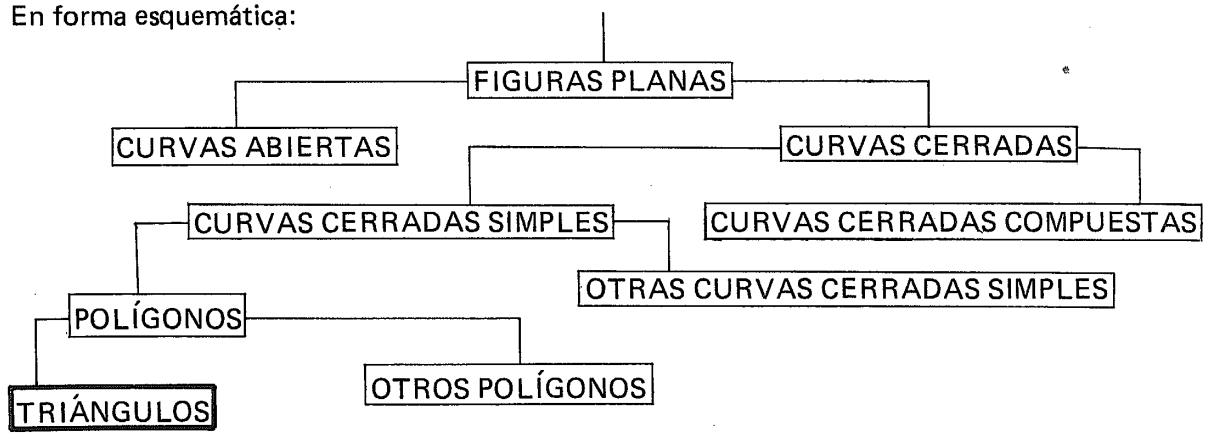
80

Hemos estudiado
el proceso
por medio del cual
construimos conceptos geométricos
utilizando:

- un pequeño número de "términos no definidos",
- algunos términos del lenguaje conjuntista, y
- algunos términos del "lenguaje común" cuyo significado damos por sabido.

81

En forma esquemática:



82

En forma de un diagrama de Venn:

F = {x|x es una figura plana}

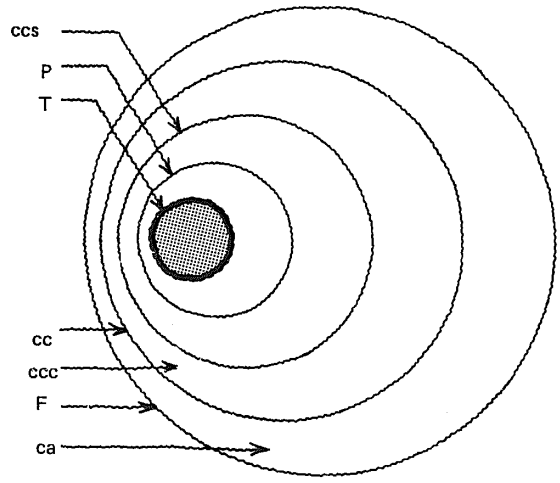
ca = {x|x es una curva abierta}

ccs = {x|x es una curva cerrada simple}

ccc = {x|x es una curva cerrada compuesta}

P = {x|x es un polígono}

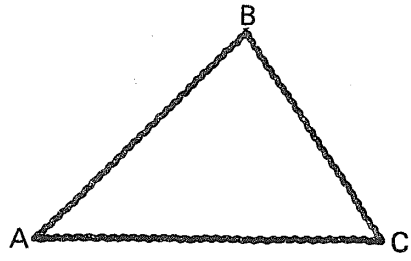
T = {x|x es un triángulo}



83

Representación simbólica de un triángulo

△ ABC.



84

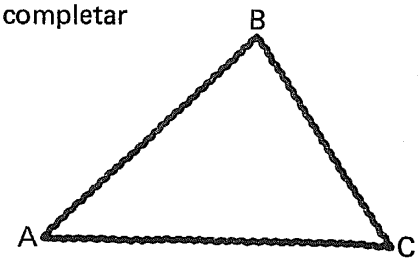
Señalar la opción correcta y completar

Un triángulo es un polígono

convexo/cóncavo [ ]

porque

[ ]

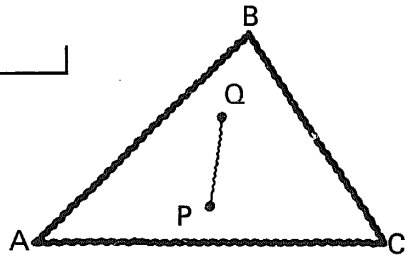


convexo

- todo par de puntos pertenecientes a su interior, determina un segmento incluido en dicho interior

85

Simbólicamente:



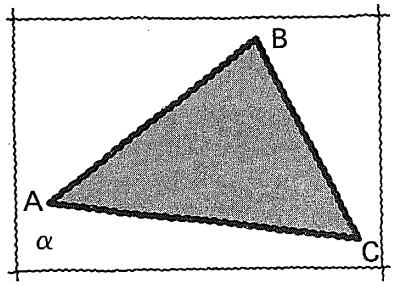
$P, Q \in \text{int}\,\triangle ABC \Leftrightarrow \overleftrightarrow{PQ} \subset \text{int}\,\triangle ABC$

86

La unión del $\triangle ABC$ y su interior constituye una

región triangular.

Simbólicamente:



$\blacktriangle ABC = \triangle ABC \cup \text{int}\,\triangle ABC.$

87

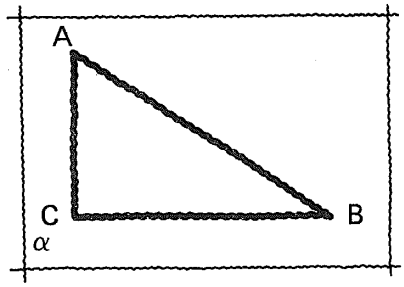
Puede definirse una

región triangular

como la intersección de tres semiplanos.

Simbólicamente:

$\blacktriangle ABC =$ [ ]

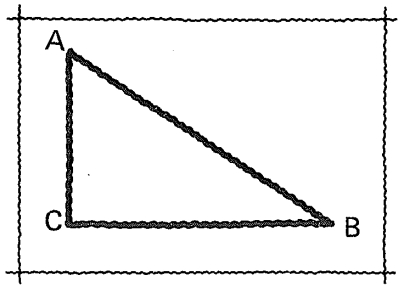


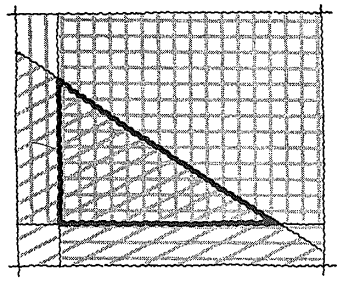
- $\text{Sp}[\overleftrightarrow{AC}, B) \cap \text{Sp}[\overleftrightarrow{CB}, A) \cap \text{Sp}[\overleftrightarrow{AB}, C)$ (o alguna expresión equivalente)

88

▲ ABC = Sp [$\overleftrightarrow{AC}$, B) ∩ Sp [$\overleftrightarrow{CB}$, A) ∩ Sp [$\overleftrightarrow{AB}$, C)

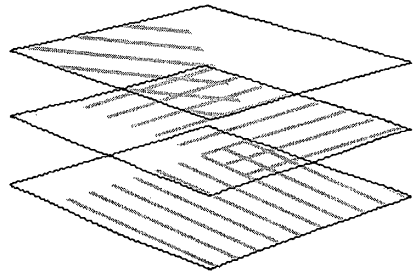
Verificación gráfica.





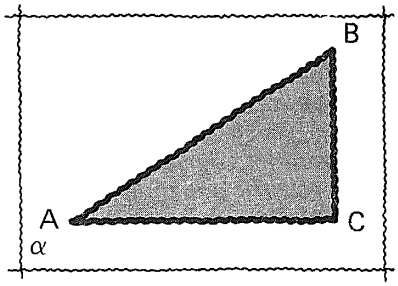
89

Puede efectuarse
una verificación experimental de este hecho
utilizando
recortes de algún material transparente
de tres colores diferentes.



90

α − ▲ ABC = ⌊_____⌋

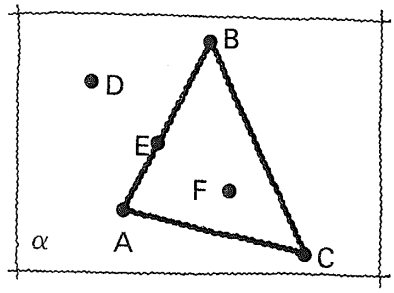


ext △ ABC

91

Señalar la opción correcta.

	V/F
$A \in \triangle ABC$	☐
$B \in \blacktriangle ABC$	☐
$C \in$ int ABC	☐
$D \in$ ext ABC	☐
$E \in \blacktriangle ABC$	☐
$F \in \blacktriangle ABC$	☐



V
V
F
V
V
V

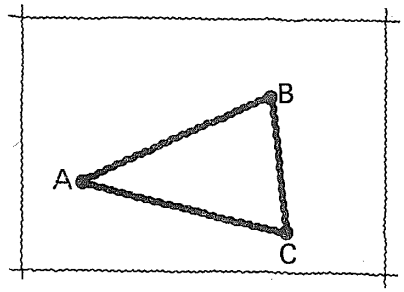
92

En el triángulo representado

los lados son
☐, ☐, ☐;

los vértices son
☐, ☐, ☐;

los ángulos interiores son
☐, ☐, ☐.



$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$

A, B, C

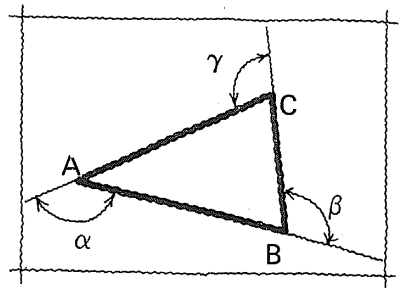
• $\angle CAB$, $\angle ABC$, $\angle BCA$
o
$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$

93

Atención.

A los ángulos α, β y γ les llamaremos

ángulos exteriores.



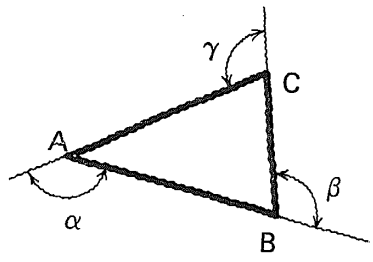
94

Indicar la medida, en grados, de:

$\measuredangle A + \measuredangle \alpha =$ _____

$\measuredangle B + \measuredangle \beta =$ _____

$\measuredangle C + \measuredangle \gamma =$ _____



180°

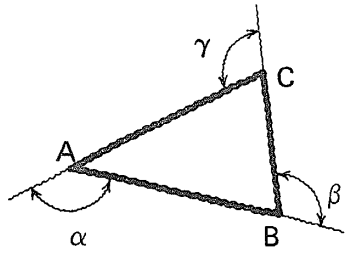
180°

180°

95

A dos ángulos
cuya suma de sus medidas
es igual a 180°
les hemos llamado

_____



suplementarios

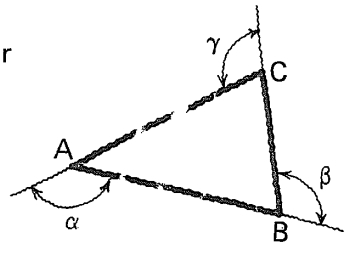
96

Un ángulo interior
y
su correspondiente ángulo exterior
son

_____

Por ejemplo,
los ángulos A y α son

_____



suplementarios

suplementarios

97

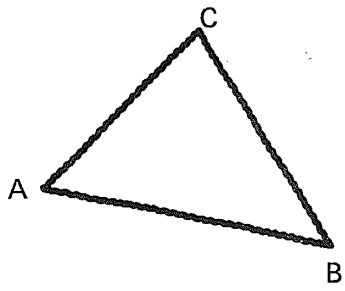
Ahora,
diremos que

el ∠ A y el lado CB son opuestos.

Similarmente, serán opuestos

el ∠ ⌊⌋ y el lado ⌊⌋

el ∠ ⌊⌋ y el lado ⌊⌋



B AC

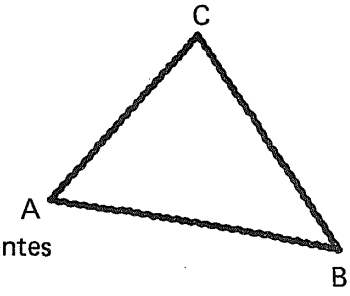
C AB

98

También

los ángulos A y B son adyacentes al lado AB

y en forma similar,
los ángulos ⌊⌋ y ⌊⌋ son adyacentes al lado ⌊⌋, del mismo modo que los ángulos ⌊⌋ y ⌊⌋ son adyacentes al lado ⌊⌋.



- B
- C
- BC
- C
- A
- CA

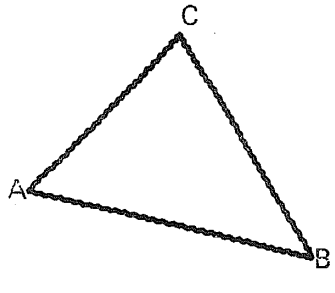
99

Además, usaremos las siguientes expresiones:

el ángulo A está comprendido entre los lados AC y AB,

⌊_____

⌊_____



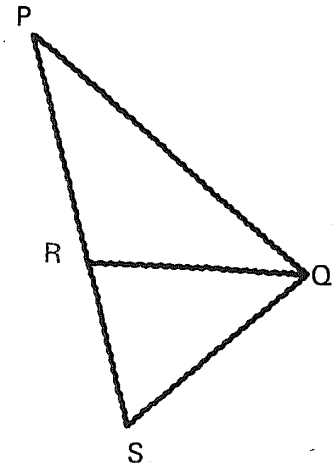
El ángulo B está comprendido entre los lados BA y BC

El ángulo C está comprendido entre los lados CA y CB

100

El ángulo PRQ es
opuesto al lado [ ]
del triángulo [ ]

El ángulo QRS
es uno de los ángulos [ ]
del triángulo [ ]
y uno de las ángulos [ ]
del triángulo [ ]



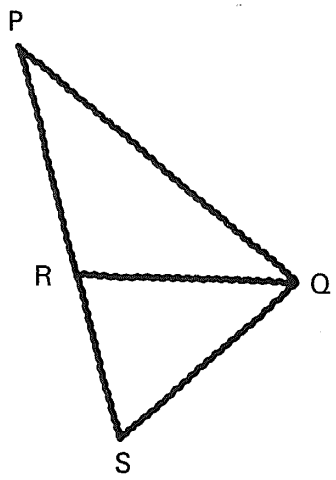
PQ
PQR

exteriores
PQR
interiores
QRS

101

Los ángulos PRQ y QRS
son [ ]
porque la suma de sus medidas

es igual a [ ] grados.



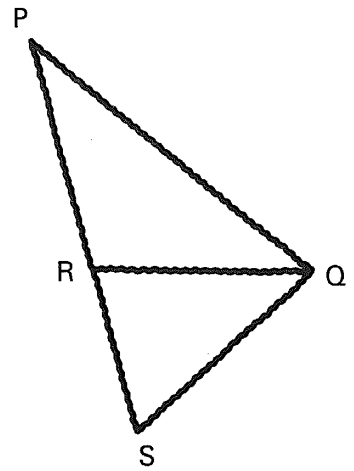
suplementarios

180

102

En el △PQR,
el ∠PQR está [ ]
entre los lados PQ y QR.

En el △QRS,
el ∠RQS está [ ]
entre los lados [ ] y [ ]



comprendido

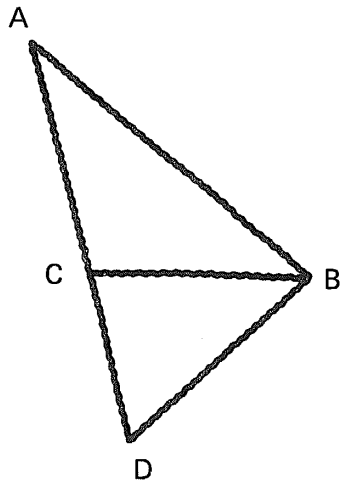
comprendido
RQ QS

103

Señalar la opción correcta.

El ∠CBD es uno de los ángulos exteriores del △ABC. V/F ⌊__⌋

El ∠BCD es uno de los ángulos exteriores del △ABC ⌊__⌋



F

V

104

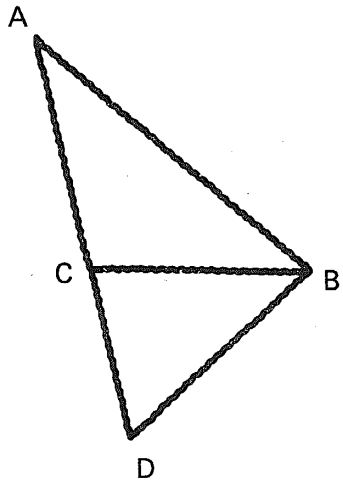
Señalar la opción correcta.

Los ángulos ABC y CBD son suplementarios.

V/F

Los ángulos ACB y BCD son suplementarios.

V/F



F

V

105

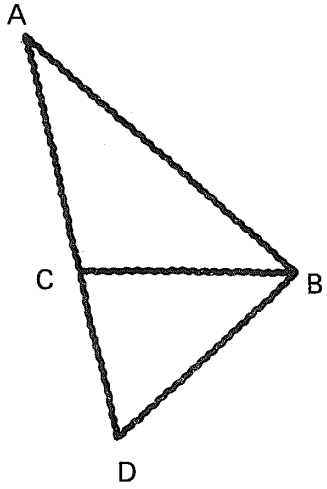
Señalar la opción correcta.

El ángulo ABC es opuesto al lado AC.

V/F

El ángulo CBD es opuesto al lado BD.

V/F

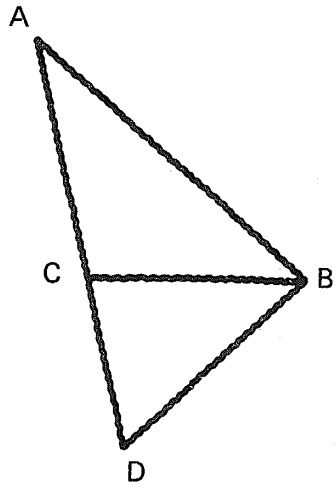


V

F

106

Señalar la opción correcta.



	V/F
En el △ABC el ángulo ACB es adyacente al lado CB	V
El ángulo ABC es adyacente al lado CB.	V
En el △ABD el ángulo BCD es adyacente al lado BD, y el ángulo CBD es adyacente al lado CB.	F V

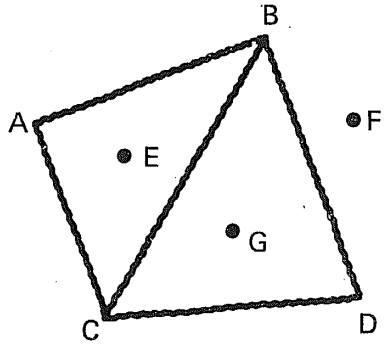
107

4.3.2.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

108

Señalar la opción correcta.



	V/F
$\overleftrightarrow{AC} \subset \triangle ABC$	V
$\overleftrightarrow{BC} \subset \triangle ABC$	V
$\overleftrightarrow{BC} \subset \triangle CBD$	V
$\overleftrightarrow{CD} \subset \triangle ABC$	F

109

Señalar la opción correcta.

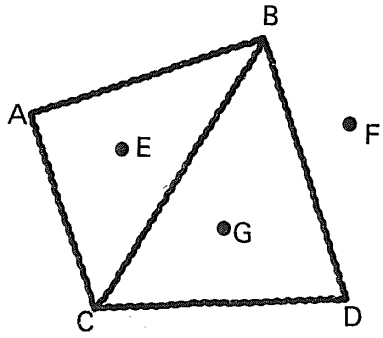
V/F

$F \in \triangle ABC$ ⌊__⌋

$E \in \triangle ABC$ ⌊__⌋

$B \in \triangle ABC$ ⌊__⌋

$B \in \triangle BCD$ ⌊__⌋



F

F

V

V

110

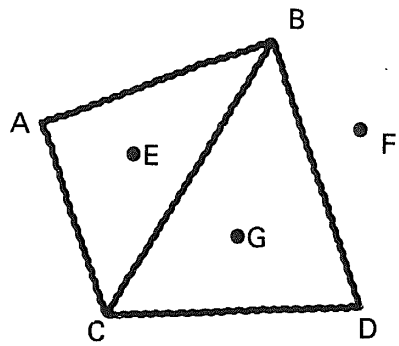
Señalar la opción correcta.

V/F

$A \in \blacktriangle ABC$ ⌊__⌋

$E \in \blacktriangle ABC$ ⌊__⌋

$F \notin \blacktriangle ABC$ ⌊__⌋



V

V

V

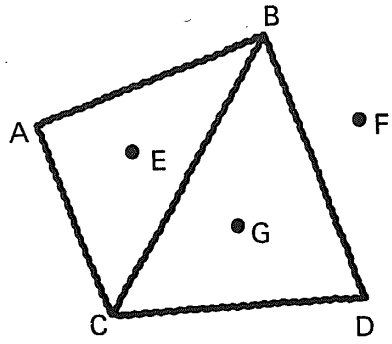
111

Señalar la opción correcta.

V/F

$\angle ABC \subset \triangle ABC$ ⌊__⌋

$\angle ABC \subset \blacktriangle ABC$ ⌊__⌋



F

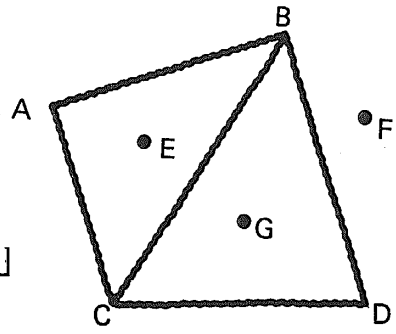
F

$\triangle ABC \cap \triangle BCD =$ ⌊___⌋

$\blacktriangle ABC \cap \blacktriangle BCD =$ ⌊___⌋

$\overleftrightarrow{AB} \cup \overleftrightarrow{BC} \cup \overleftrightarrow{AC} =$ ⌊_____⌋

$\triangle ABC \cup \text{int}\,\triangle ABC =$ ⌊_____⌋



$\overleftrightarrow{BC}$

$\overleftrightarrow{BC}$

$\triangle ABC$

$\blacktriangle ABC$

4.3.2.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

4.3.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* un triángulo,
- *ubicar* el concepto de triángulo en el marco conceptual de las figuras planas,
- *representar* gráfica y simbólicamente un triángulo,
- *explicar* la diferencia entre triángulo y región triangular,
- *interpretar* una región triangular como la intersección de tres semiplanos cerrados,
- *identificar* los siguientes elementos de un triángulo: vértices, lados, ángulos interiores, ángulos exteriores,
- *identificar* los elementos opuestos o adyacentes en un triángulo dado,
- *señalar* la verdad o falsedad de proposiciones expresando relaciones de pertenencia o inclusión entre triángulos o regiones triangulares y sus elementos.

3.3

Clasificación de los triángulos

113

Recordemos
que la expresión

$\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{BA}$

se lee:

_____

"el segmento AB
es congruente con
el segmento BA"

114

La expresión

$|\overleftrightarrow{AB}| = |\overleftrightarrow{BA}|$

Se lee:

_____

"la medida del segmento
AB es igual a
la medida del segmento
BA"

115

Señalar la opción correcta.

La expresión

$\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

se lee: [ ]

y es una proposición

verdadera/falsa

- el segmento AB
  es congruente con
  el segmento CD
  si y sólo si
  la medida del segmento
  AB es igual a la
  medida del segmento CD

verdadera

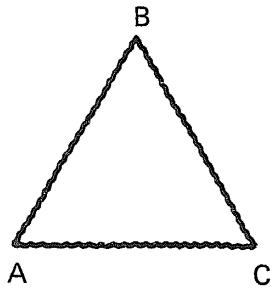
116

Un triángulo
es

equilátero

si y sólo si
sus tres lados son congruentes.
Simbólicamente,
con referencia a la figura:

[ ]



$\triangle ABC$ es equilátero $\Leftrightarrow$
$(\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{BC}) \wedge (\overrightarrow{BC} \approx \overrightarrow{AC})$
$\wedge (\overrightarrow{AC} \approx \overrightarrow{AB})$
o bien:
$\triangle ABC$ es equilátero $\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{BC} \approx \overrightarrow{AC}$

117

Un triángulo (ABC)
es

isósceles

si y sólo si
dos de sus lados son congruentes.
Simbólicamente:

[ ]

$\triangle ABC$ es isósceles $\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{BC} \vee \overrightarrow{BC} \approx \overrightarrow{AC}$
$\vee \overrightarrow{AC} \approx \overrightarrow{AB}$

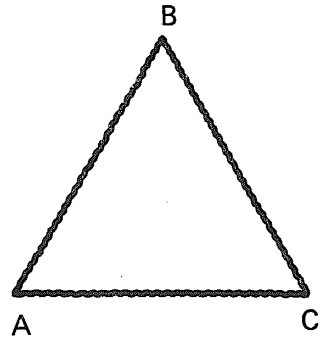
118

Señalar la opción correcta.

En el triángulo representado:

$\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{BC} \approx \overleftrightarrow{AC}$

Entonces, de acuerdo con las definiciones anteriores:



$\triangle ABC$ **es/no es** equilátero,

$\triangle ABC$ **es/no es** isósceles.

es

es

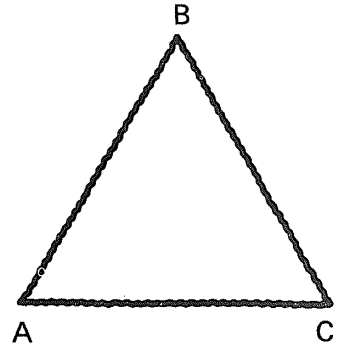
119

Estudiar con atención este esquema

$$\text{Se verifica} \begin{cases} \overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{BC} \\ \overleftrightarrow{BC} \approx \overleftrightarrow{AC} \\ \overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{AC} \end{cases}$$

$$\triangle ABC \text{ es equilátero} \Leftrightarrow \underbrace{\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{BC}}_{V} \wedge \underbrace{\overleftrightarrow{BC} \approx \overleftrightarrow{AC}}_{V} \wedge \underbrace{\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{AC}}_{V}$$

$$\triangle ABC \text{ es isósceles} \Leftrightarrow \underbrace{\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{BC}}_{V} \vee \underbrace{\overleftrightarrow{BC} \approx \overleftrightarrow{AC}}_{V} \vee \underbrace{\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{AC}}_{V}$$



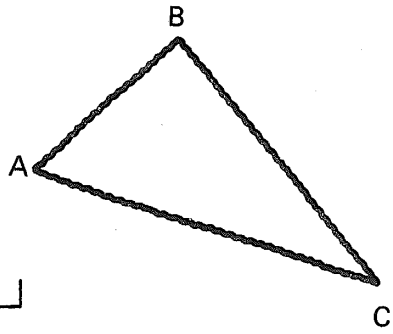
120

Un triángulo
es

escaleno

si y sólo si
no tiene lados congruentes.

Simbólicamente:



• $\triangle ABC$ es escaleno $\Leftrightarrow$
$\overleftrightarrow{AB} \not\approx \overleftrightarrow{BC} \wedge \overleftrightarrow{BC} \not\approx \overleftrightarrow{AC}$
$\wedge \overleftrightarrow{AB} \not\approx \overleftrightarrow{AC}$

121

Resumen de clasificación de los triángulos por sus lados.

equilátero

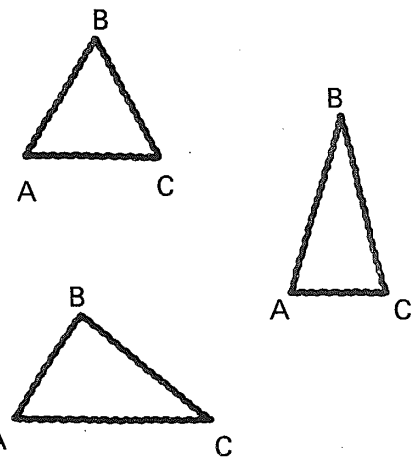
$\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{BC} \approx \overleftrightarrow{AC}$

isósceles

$\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{BC}$ ó $\overleftrightarrow{BC} \not\approx \overleftrightarrow{AC}$ ó $\overleftrightarrow{AB} \not\approx \overleftrightarrow{AC}$

escaleno

$\overleftrightarrow{AB} \not\approx \overleftrightarrow{BC} \not\approx \overleftrightarrow{AC}$



122

Un triángulo
es

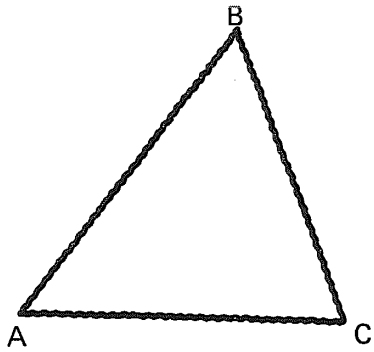
acutángulo

si y sólo si
sus tres

ángulos interiores

son

agudos.



$\measuredangle A < 90°$; $\measuredangle B < 90°$; $\measuredangle C < 90°$

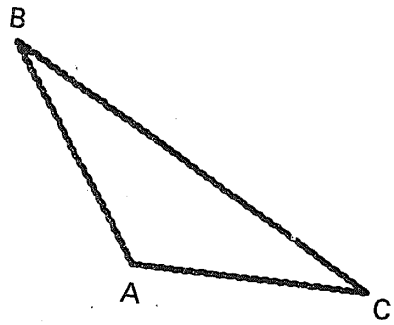
123

Un triángulo es

obtusángulo

si y sólo si tiene

un ángulo interior obtuso.



Por ejemplo:

$90° < \measuredangle A < 180°$

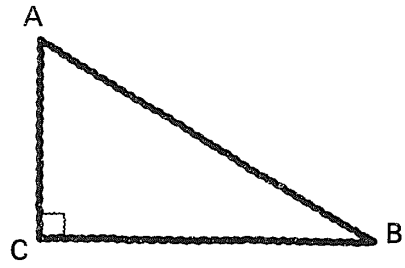
124

Un triángulo es

rectángulo

si y sólo si tiene

un ángulo interior recto.



Por ejemplo: $\measuredangle C = 90°$

125

Resumen de clasificación de los triángulos por sus ángulos interiores.

acutángulo

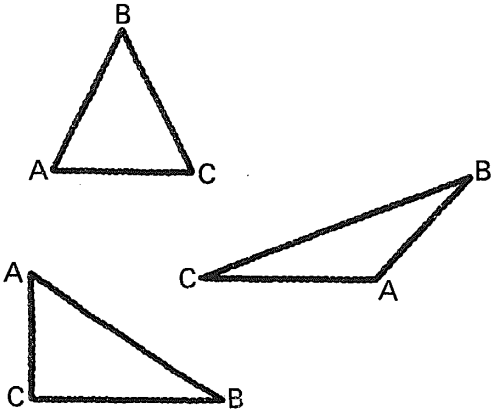
Los tres ángulos interiores son agudos.

obtusángulo

Un ángulo interior es obtuso.

rectángulo

Un ángulo interior es recto.

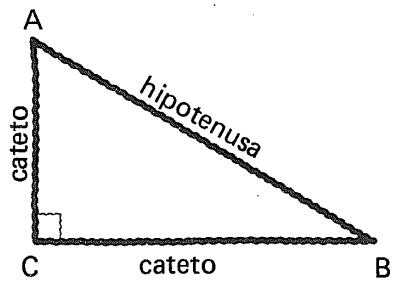


En un triángulo rectángulo,
los lados que determinan
el ángulo recto
se denominan

catetos

y el lado opuesto al ángulo recto
se denomina

hipotenusa.



4.3.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *identificar* en un conjunto dado de triángulos, los que son: equiláteros, isósceles o escalenos,
- *identificar* en un conjunto dado de triángulos, los que son: acutángulos, obtusángulos o rectángulos,
- *nombrar* los lados de un triángulo rectángulo, de acuerdo con su posición con respecto al ángulo recto.

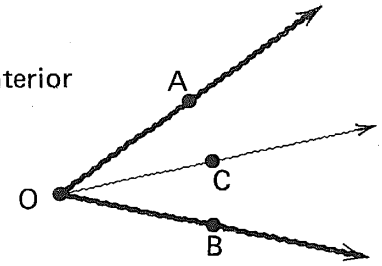
3.4

Bisectriz, mediatriz, mediana y altura en un triángulo.

127

Consideremos
el ángulo AOB
y
un rayo $\overrightarrow{OC}$ contenido en su interior
que lo divide
en dos ángulos congruentes.

$\angle AOC \cong \angle COB$
ó
$\measuredangle AOC = \measuredangle COB$

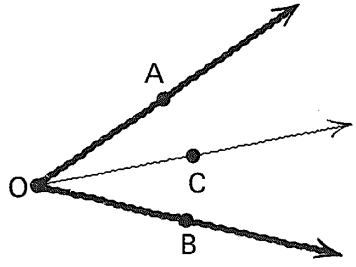


128

Llamamos a
$\overrightarrow{OC}$
la

bisectriz del ángulo AOB

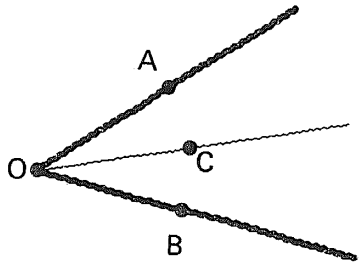
si y sólo si
divide al ángulo AOB
en dos ángulos congruentes.



129

Simbólicamente.

$\overrightarrow{OC}$ es bisectriz del $\angle AOB \Leftrightarrow$



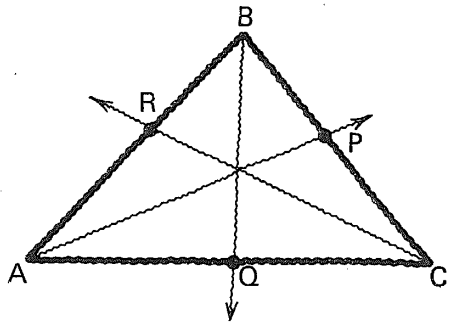
$\angle AOC \cong \angle COB$
ó
$\measuredangle AOC = \measuredangle COB$

130

Bisectriz de un triángulo

es
cada una de las bisectrices
de los ángulos interiores.

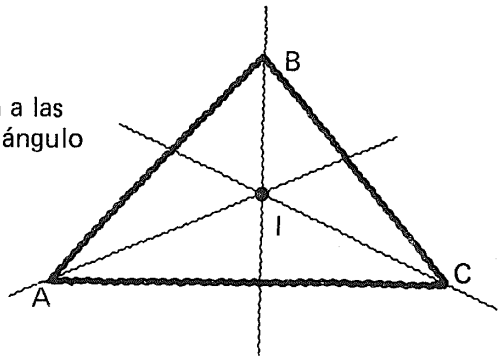
$\overleftrightarrow{AP}$ es la bisectriz del $\angle A$.
$\overleftrightarrow{BQ}$ es la bisectriz del $\angle B$.
$\overleftrightarrow{CR}$ es la bisectriz del $\angle C$.



131

Puede demostrarse
que
las rectas que contienen a las
tres bisectrices de un triángulo
se intersecan
en un punto (I)
llamado

incentro.

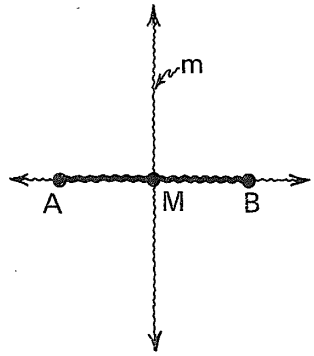


132

Consideremos
un segmento de recta ($\overline{AB}$)
y
una recta (m)
perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$
que
divide al segmento dado
en dos segmentos congruentes.

$m \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\overline{AM} \cong \overline{MB}$



133

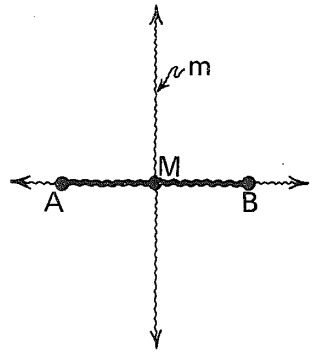
Se denomina

mediatriz del segmento AB

a la perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$
que
divide al segmento AB
en dos
segmentos congruentes.

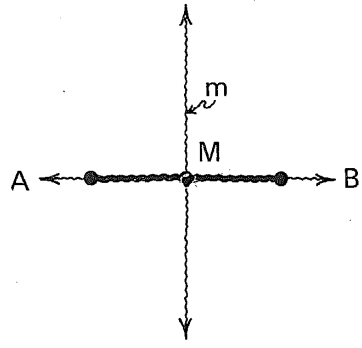
Al punto M ($M \in \overline{AB}$)
tal que
$\overline{AM} \cong \overline{MB}$
se le llama

punto medio de $\overline{AB}$.



134

Simbólicamente:



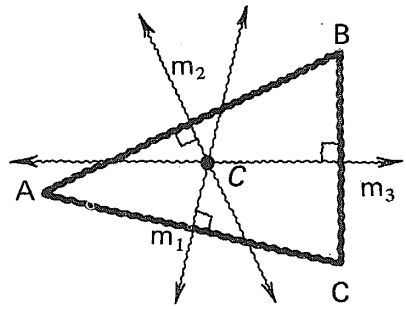
m es mediatriz de $\overline{AB} \Leftrightarrow m \perp \overleftrightarrow{AB} \wedge M \in \overline{AB} \wedge M \in m \wedge \overline{AM} \cong \overline{MB}$

135

Mediatriz de un triángulo

es
cada una de las mediatrices
de los lados.

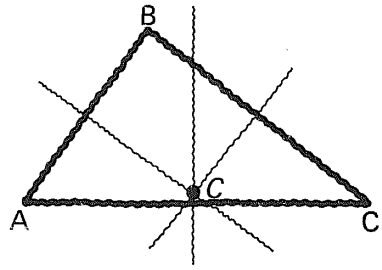
m_1 es la mediatriz de $\overleftrightarrow{AC}$.
m_2 es la mediatriz de $\overleftrightarrow{AB}$.
m_3 es la mediatriz de $\overleftrightarrow{BC}$.



136

Puede demostrarse
que
las tres mediatrices
de un triángulo
se intersecan
en un punto (*C*)
llamado

circuncentro.

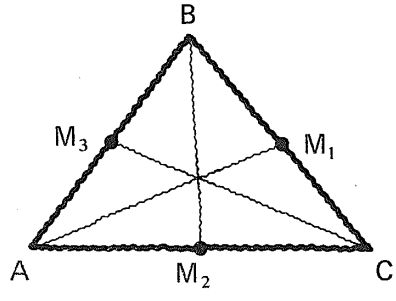


137

Mediana de un triángulo

es el segmento de recta
cuyos extremos son
un vértice del triángulo
y el punto medio
del lado opuesto.

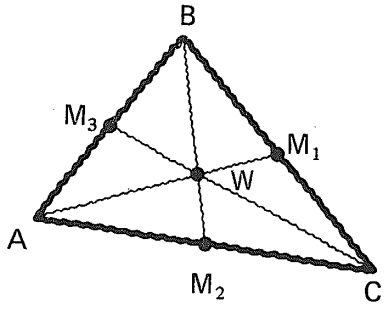
Las medianas del
triángulo represendado
son: $\overleftrightarrow{AM_1}$, $\overleftrightarrow{BM_2}$ y $\overleftrightarrow{CM_3}$.



138

Las rectas que contienen a las medianas de un triángulo se intersecan en un punto (W) llamado

baricentro.

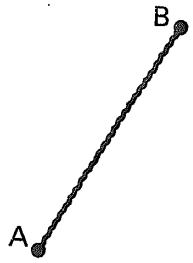


139

Ahora, definiremos la

distancia entre los puntos A y B

como la medida del segmento $\overline{AB}$.



140

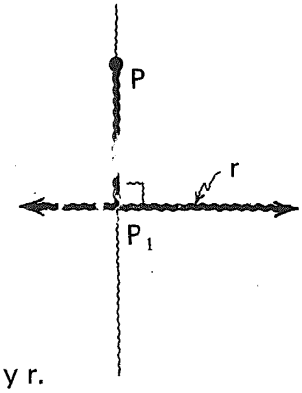
La distancia de un punto P

a una recta r

quedará definida como la medida del segmento $\overline{PP_1}$ tal que $\overleftrightarrow{PP_1}$ es perpendicular a r.

y

P_1 es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{PP_1}$ y r.



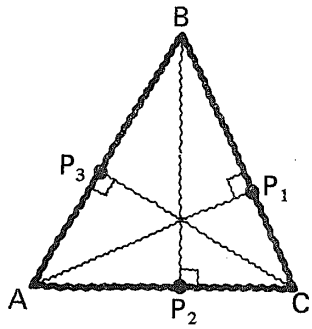
141

Altura de un triángulo

es la

distancia*

de un vértice
a la recta que contiene
al lado opuesto.
Las alturas del triángulo ABC
aquí representado son:
$\overleftrightarrow{AP_1}$, $\overleftrightarrow{BP_2}$ y $\overleftrightarrow{CP_3}$.

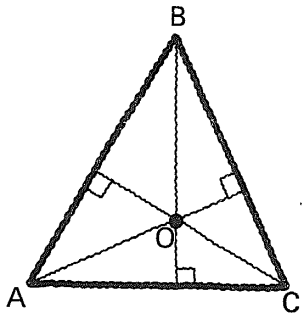


*Ver la definición de distancia dada en el cuadro anterior.

142

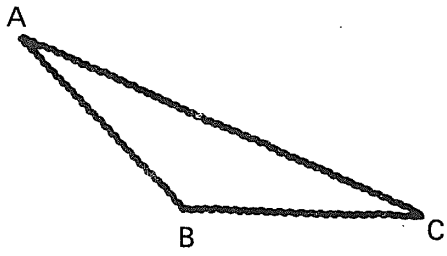
Las rectas que contienen a las
alturas de un triángulo
se
intersecan
en un punto (O)
llamado

ortocentro.

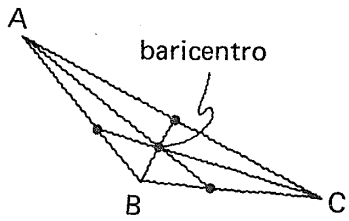


143

Trazar las tres medianas
del triángulo ABC,
y "su punto de intersección"
o baricentro

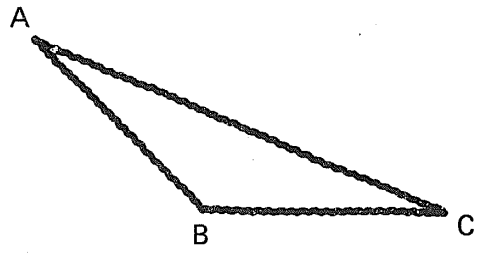


baricentro

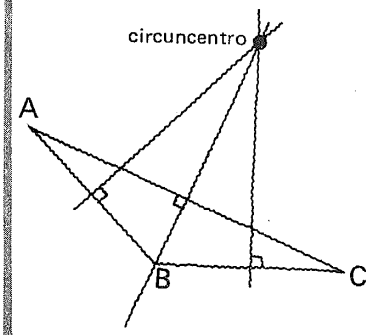


144

Trazar las tres mediatrices
del triángulo ABC
y su punto de intersección
o

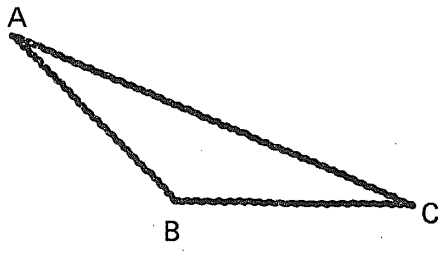


● circuncentro

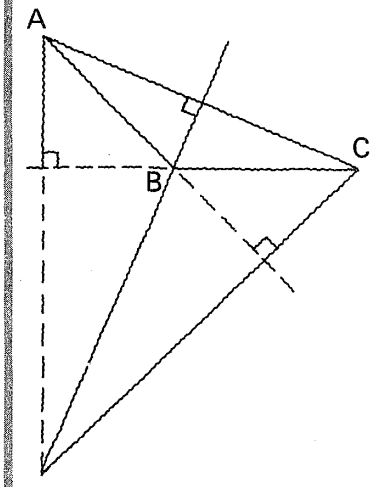


145

Trazar las tres alturas
del triángulo ABC y
el punto de intersección
de las rectas que las
contienen o



● ortocentro



4.3.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

4.3.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de

- *definir* los conceptos de:

  – bisectriz de un ángulo,
  – mediatriz de un segmento,
  – distancia entre dos puntos,
  – distancia de un punto a una recta;

- *identificar* los siguientes elementos de un triángulo:

  – bisectrices e incentro,
  – mediatrices y circuncentro,
  – medianas y baricentro,
  – alturas y ortocentro.

3.5

Ángulos opuestos por el vértice, adyacentes, correspondientes, alternos internos y alternos externos

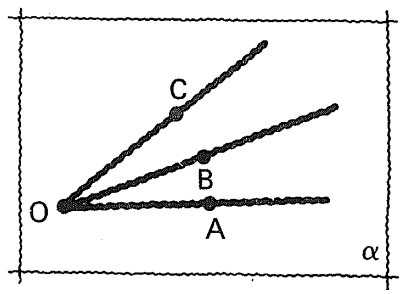
146

Dos ángulos contenidos en un mismo plano que tienen un lado común se llaman

consecutivos.

$\angle AOB$ y $\angle BOC$ son consecutivos.

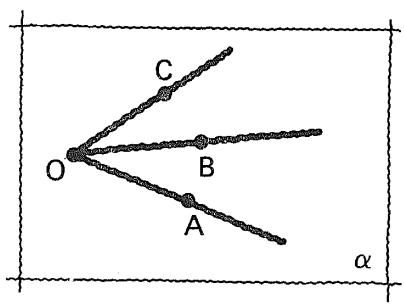
El lado común es $\overrightarrow{OB}$



147

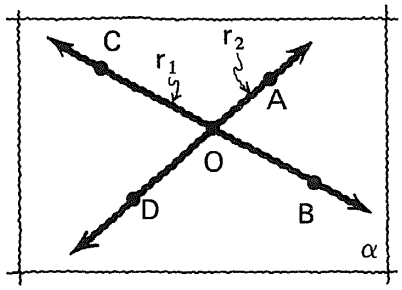
Se verifica que:

$\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = \measuredangle AOC$



148

Consideremos, ahora, dos rectas concurrentes (r_1 y r_2), contenidas en un plano. Tales rectas determinan cuatro ángulos:



∟_____, ∟_____, ∟_____ y ∟_____

∠AOB, ∠COA, ∠COD y ∠DOB (en cualquier orden).

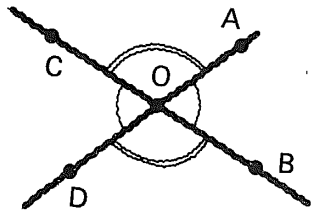
149

A los ángulos COD y AOB se les llama

opuestos por el vértice.

Los ángulos COA y DOB también son

opuestos por el vértice.



150

A los ángulos AOB y COA se les llama

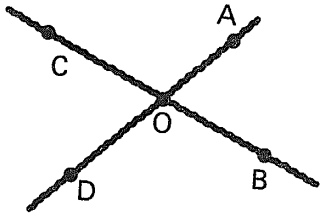
adyacentes

También son adyacentes:

∠COD y ∠DOB,

∟_____ y ∟_____,

∟_____ y ∟_____.

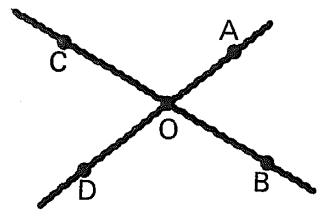


∠COA y ∠COD,

∠DOB y ∠AOB

151

Podemos observar
que
dos ángulos adyacentes
son |_____|
porque
la suma de sus medidas
es igual a |____| grados.



suplementarios

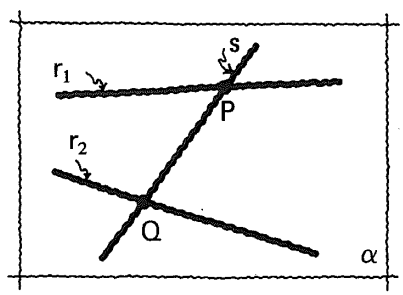
180

152

En el plano α,
consideremos dos rectas distintas
(r_1 y r_2)
y
una recta (s) llamada

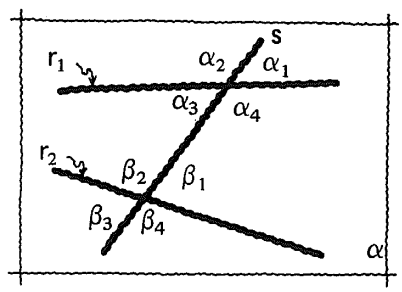
transversal
o
secante

que
las interseca
(en los puntos P y Q).



153

Quedan así determinados
ocho ángulos
que,
considerados por pares,
reciben
los siguientes nombres:*



*Véase cuadro siguiente.

154

$\angle\alpha_1$ y $\angle\beta_1$ son

correspondientes.

Otros pares de ángulos correspondientes serían:

[_____] y [_____],

[_____] y [_____],

[_____] y [_____].

$\angle\alpha_2$ $\angle\beta_2$

$\angle\alpha_3$ $\angle\beta_3$

$\angle\alpha_4$ $\angle\beta_4$

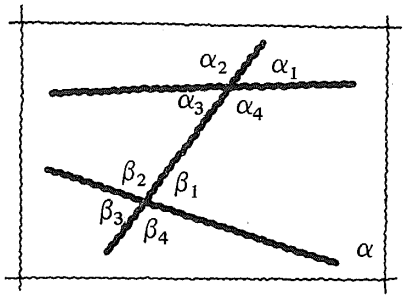
155

$\angle\alpha_3$ y $\angle\beta_1$ son

alternos internos

Otro par de ángulos alternos internos es:

[___] y [____]



$\angle\alpha_4$ $\angle\beta_2$

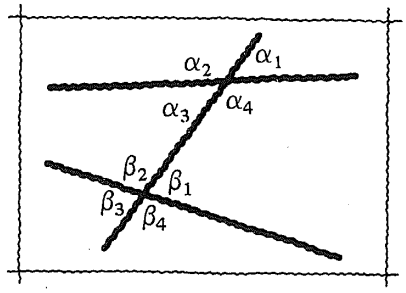
156

$\angle\alpha_1$ y $\angle\beta_3$ son

alternos externos

Otro par de ángulos alternos externos es:

[____] y [____]



$\angle\alpha_2$ $\angle\beta_4$

157

Ya sabemos que

$\angle\alpha_1$ y $\angle\alpha_3$ son

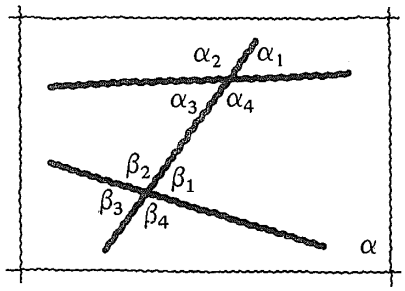
opuestos por el vértice.

Otros pares de ángulos opuestos por el vértice son:

____ y ____,

____ y ____,

____ y ____.



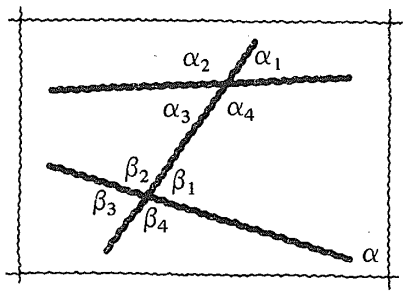
- $\angle\alpha_2$
- $\angle\alpha_4$
- $\angle\beta_1$
- $\angle\beta_3$
- $\angle\beta_2$
- $\angle\beta_4$

(en cualquier orden)

158

A un par de ángulos como α_1 y α_4 le hemos llamado:

_____



adyacentes

159

Otros pares de ángulos adyacentes son:

____ y ____,

____ y ____,

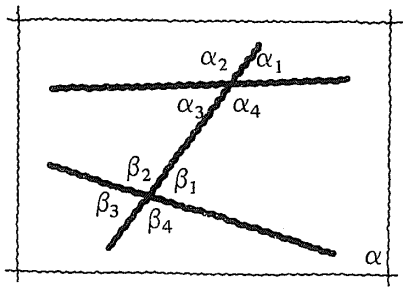
____ y ____,

____ y ____,

____ y ____,

____ y ____,

____ y ____.



$\angle\alpha_2$	$\angle\alpha_3$
$\angle\beta_1$	$\angle\beta_4$
$\angle\beta_2$	$\angle\beta_3$
$\angle\alpha_1$	$\angle\alpha_2$
$\angle\alpha_3$	$\angle\alpha_4$
$\angle\beta_1$	$\angle\beta_2$
$\angle\beta_3$	$\angle\beta_4$

4.3.5.1

Práctica adicional
de
identificación de ángulos:

- correspondientes,
- alternos internos,
- alternos externos;
- opuestos por el vértice,
  y
- adyacentes,

si se considera necesario.

160

Consideremos, ahora,
la siguiente proposición
que aceptaremos como
axioma 6.

"Dos rectas intersecadas por una tercera

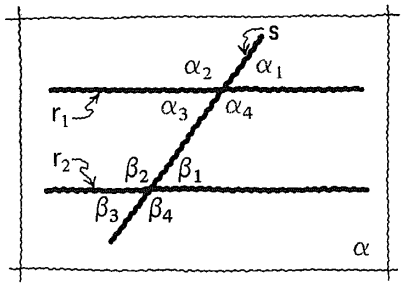
son paralelas

si y sólo si

los ángulos correspondientes son congruentes".

161

Simbólicamente:



$$r_1 \parallel r_2 \Leftrightarrow (\angle\alpha_1 \cong \angle\beta_1) \vee (\angle\alpha_2 \cong \angle\beta_2) \vee (\angle\alpha_3 \cong \angle\beta_3) \vee (\angle\alpha_4 \cong \angle\beta_4)$$

4.3.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *identificar* los ángulos opuestos por el vértice, adyacentes, correspondientes, alternos internos y alternos externos; dadas dos rectas intersecadas por una transversal,

- *enunciar* y *explicar* el axioma de paralelismo de dos rectas intersecadas por una transversal.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 10 de mayo de 1984,
en los talleres de Impresora Lorenzana, S. A.,
Cafetal núm. 661, Col. Granjas México,
se encuadernó en Servicios Editoriales Profesionales, S. A.,
Av. 5 de Mayo núm. 495, Col. Merced Gómez,
Deleg. Álvaro Obregón, 01600, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO MIA KC 100